ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ
ΔΙΚΤΑΙΟΥ ΑΝΤΡΟΥ 3, 71201
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΗΛ. – Fax : 2810-288478
e-mail : info@math-her.gr

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΙΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ. 28 – η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης)
Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου (σελ. 96 – τύπος και η επόμενη πρόταση/παρατήρηση)
Γ. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ 2^o

Για $\chi \neq \pm 1$ έχουμε :

α) $\dfrac{e^{\chi} f(\chi)}{\chi^2 - 1} = \dfrac{e^{\chi}\dfrac{\chi - 1}{e^{\chi}}}{(\chi-1)(\chi+1)} = \dfrac{1}{\chi+1}$ και άρα $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{\chi} f(\chi)}{\chi^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$

β) $f'(\chi) = \dfrac{(\chi-1)' e^{\chi} - (\chi-1)(e^{\chi})'}{(e^{\chi})^2} = \dfrac{e^{\chi} - e^{\chi}(\chi-1)}{(e^{\chi})^2} = \dfrac{(2-\chi)}{e^{\chi}}$ οπότε $f'(\chi) = \dfrac{(2-\chi)}{e^{\chi}}$

άρα : $e^{\chi} f'(\chi) = 2 - \chi$

γ) Βρίσκουμε τις ρίζες της $f'(\chi)$ και το πρόσημό της. Είναι γνωστό ότι $e^{\chi}>0$.

$f'(\chi) = 0 \Rightarrow \dfrac{2-\chi}{e^{\chi}} = 0 \Rightarrow \chi = 2$ και $f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\chi}{e^{\chi}} > 0 \Leftrightarrow \chi < 2$

Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα μεταβολών έχουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο χ=2 την τιμή $f(2) = \dfrac{1}{e^2} = e^{-2}$.

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
f΄(χ)	+		-
f(χ)	↗		↘

ΘΕΜΑ 3^o

α) τύπου Α : $\overline{X}_A = \dfrac{20+26+24+22+18}{5} = \dfrac{110}{5} = 22$

τύπου Β : $\overline{X}_B = \dfrac{26+32+19+20+23}{5} = \dfrac{120}{5} = 24$

β) Θα αναγάγουμε το πρόβλημα στο κόστος ανά 1 ώρα (χιλιάδα). Για τον τύπο Α έχουμε κόστος 38 ευρώ και διαρκεί περίπου 22 (χιλιάδες) ώρες, άρα έχουμε : $K_A = \dfrac{38}{22} = \dfrac{19}{11}$. Για τον τύπο Β έχουμε κόστος 40 ευρώ και διαρκεί περίπου 24 (χιλιάδες) ώρες, άρα έχουμε : $K_B = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$. Όμως $\frac{19}{11} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow 19 \cdot 3 > 11 \cdot 5$ άρα συμφέρει να αγοράσουμε την μπαταρία τύπου Β.

γ) $s_A^2 = \frac{1}{5}\left[(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2\right] = \ldots = 8$

$s_B^2 = \frac{1}{5}\left[(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2\right] = \ldots = 22$

Άρα $s_A = 2\sqrt{2}$ και $s_B = \sqrt{22}$.

δ) $CV_A = \frac{s_A}{\bar{X}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}$ και $CV_B = \frac{s_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24}$. Φανερά ισχύει : $3 < \sqrt{11}$ και άρα έχουμε $11\sqrt{11} > 11 \cdot 3 > 24 \Rightarrow \frac{\sqrt{11}}{24} > \frac{1}{11} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11}$

και έτσι $CV_B > CV_A$. Συνεπώς ο τύπος μπαταριών Α παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Έστω Α το ενδεχόμενο να διαβάζουν την εφημερίδα α και Β ενδεχόμενο να διαβάζουν την εφημερίδα β. Τότε

$P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ ενώ $P(A \cap B') = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = P(A - B)$.

α) Το ενδεχόμενο του οποίου ζητείται η πιθανότητα είναι το : $A' \cup B$.

$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) =$

$= 1 - P(A) + P(B) - \left[P(B) - P(A \cap B)\right] =$

$= 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \left[P(A) - P(A \cap B)\right] =$

$= 1 - P(A - B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

(***<u>Αλλιώς</u>*** : Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $A \cap B'$ και $A' \cup B$ είναι συμπληρωματικά (De Morgan), άρα έχουμε $P(A' \cup B) = 1 - P(A \cap B') = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$)

β) Αφού ισχύει $A \cap B \subseteq B \subseteq A' \cup B$ θα έχουμε $P(A \cap B) \leq P(B) \leq P(A' \cup B)$.

Όμως $P(A' \cup B) = \frac{7}{10}$ και $P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B') \Rightarrow \frac{1}{2} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$. Συνεπώς η ζητούμενη ανισότητα ισχύει.

γ) Παραγωγίζοντας έχουμε $f(\chi)=3\chi^2-\chi+P(B)$, και η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=1-12P(B)$. Από το ερώτημα (β) ισχύει ότι $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$ οπότε θα έχουμε

$12\frac{1}{5} \leq 12P(B) \leq 12\frac{7}{10} \Rightarrow -12\frac{1}{5} \geq -12P(B) \geq -12\frac{7}{10} \Rightarrow$

$1 - 12\frac{1}{5} \geq 1 - 12P(B) \geq 1 - 12\frac{7}{10} \Rightarrow -\frac{7}{5} \geq \Delta$. Οπότε θα είναι $\Delta<0$ και άρα το τριώνυμο δεν έχει καμμία ρίζα και είναι ομόσημο του 3=α για κάθε τιμή του χ. Συνεπώς έχουμε $f'(\chi)>0$ για όλα τα χ και η $f(\chi)$ είναι γνησίως άυξουσα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή δεν έχει ακρότατα.

ΣΧΟΛΙΑ

Το 1^{ο} θέμα υπεισέρχεται σε όλα τα κεφάλαια της ύλης χωρίς όμως να έχει ιδιαίτερες δυσκολίες και το 2^{ο} είναι απλό και βασικό θέμα.

Τα ερωτήματα (α) και (γ) του 3^{ου} θέματος αποτελούν απλές εφαρμογές τύπων, ενώ το ερώτημα (β) χρειάζεται κριτική μαθηματική σκέψη και αποτελεί δείγμα της χρησιμότητάς της στην καθημερινή ζωή. Υποστηρίζουμε θερμά τέτοια ερωτήματα στις πανελλήνιες εξετάσεις. Στο ερώτημα (δ) θεωρούμε ότι ο υποψήφιος πρέπει να μπορεί να συγκρίνει θετικά κλάσματα που περιέχουν ριζικά, χωρίς να είναι απαραίτητη η προσεγγιστική τιμή των ριζικών.

Τα ερωτήματα (α) και (β) του 4^{ου} θέματος απαιτούσαν κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα, ενώ το ερώτημα (γ) παρά το ότι απαιτεί συνδυασμό γνώσεων δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες.

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

Τα κλιμακούμενης δυσκολίας θέματα καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης και απευθύνονται σε όλους/ες τους/τις υποψηφίους/ιες. Παράλληλα υπάρχουν ερωτήματα που θα μειώσουν το ποσοστό των πολύ υψηλών επιδόσεων.

Τα θέματα επεξεργάστηκαν οι Μαθηματικοί και μέλη του Δ.Σ. του Παραρτήματος Ηρακλείου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας:

Βαρβεράκης Ανδρέας
Παπαδάκη Ελένη
Παυλάκος Περικλής
Σαρτζετάκης Λευτέρης
Συγκελάκης Αλέξανδρος